Feladat 1. Igaz, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$?

Megoldás: Ha egy test tartalmazza $\sqrt{2}$-t és $\sqrt{3}$-at, akkor tartalmazza $\sqrt{2}+\sqrt{3}$-at is, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

A másik irányú tartalmazás azon múlik, hogy előáll-e $\sqrt{2}$, illetve $\sqrt{3}$ az $a := \sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionális együtthatós polinomjaként. Ehhez ki kell számolni a hatványait (elég a harmadik hatványig elmenni, hiszen a két másodfokú algebrai szám összege, így legfeljebb negyedfokú). Mivel $a^3 = 2\sqrt{2}+3\cdot 2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\cdot 3+3\sqrt{3} = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$, $\sqrt{2} = \frac{1}{2}(a^3 - 9a)$ és $\sqrt{3} = \frac{1}{2}(11a - a^3)$. Tehát a két test megegyezik.

Feladat 2. Igazolja, hogy az algebrai $\mathbf{L} \,|\, \mathbf{K}$ testbővítés akkor és csak akkor véges fokú, ha léteznek olyan $l_1, \dots, l_n \in L$ elemek, melyekre $\mathbf{L} = \mathbf{K}(l_1, \dots, l_n)$.

Megoldás: Ha $\mathbf{L} \,|\, \mathbf{K}$ véges fokú, akkor $\mathbf{L}$ véges fokú vektortér $\mathbf{K}$ felett, vagyis vannak olyan $l_1, \dots, l_n \in L$ elemek, amelyek $\mathbf{K}$ feletti lineáris kombinációjaként előáll $\mathbf{L}$ összes eleme. Ezek a lineáris kombinációk benne vannak $\mathbf{K}(l_1, \dots, l_n)$-ben, így $\mathbf{L} = \mathbf{K}(l_1, \dots, l_n)$.

A másik irányhoz: az összes l_i algebrai $\mathbf{K}$, és így $\mathbf{K}(l_1, \dots, l_{i-1})$ felett, tehát $[\mathbf{K}(l_1, \dots, l_{i-1})(l_i) : \mathbf{K}(l_1, \dots, l_{i-1})]$ véges. Ekkor ezek szorzata is véges, az pedig a fokszámtétel alapján éppen $[\mathbf{K}(l_1, \dots, l_n) : \mathbf{K}] = [\mathbf{L} : \mathbf{K}]$.

Feladat 3. Adja meg $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})$ résztesteit.

Megoldás: Természetesen $\mathbb{Q}$ és maga $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})$ résztestek. Minden egyéb résztest a kettő közé esik. Mivel a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{12}) \,|\, \mathbb{Q}$ bővítés negyedfokú, a fokszámtétel miatt az esetleges közbülső testek másodfokú bővítései $\mathbb{Q}$-nak. A másodfokú bővítések egyszerűek, így a kérdés az, hogy melyek azok az α másodfokú algebrai számok, amelyekre $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})$?

Legyen
$$\alpha = q_0 + q_1 \sqrt[4]{12} + q_2 \sqrt{12} + q_3 \sqrt[4]{12^3},$$
ahol a q_i-k racionálisak. Ekkor
$$\alpha^2 = q_0^2 + 24q_1q_3 + 12q_2^2 + (2q_0q_1 + 24q_2q_3)\sqrt[4]{12} + (q_1^2 + 2q_0q_2 + 12q_3^2)\sqrt{12} + (2q_0q_3 + 2q_1q_2)\sqrt[4]{12^3}.$$
Az α másodfokú $\mathbb{Q}$ felett, vagyis az $(1, 0, 0, 0)$, (q_0, q_1, q_2, q_3), és $(q_0^2 + 24q_1q_3 + 12q_2^2, 2q_0q_1 + 24q_2q_3, q_1^2 + 2q_0q_2 + 12q_3^2, 2q_0q_3 + 2q_1q_2)$ vektorok $\mathbb{Q}$ felett lineárisan függőek. Ez ekvivalens azzal, hogy a (q_1, q_2, q_3) és a $(2q_0q_1 + 24q_2q_3, q_1^2 + 2q_0q_2 + 12q_3^2, 2q_0q_3+2q_1q_2)$ vektorok arányosak. Mivel előbbi arányos a $(2q_0q_1, 2q_0q_2, 2q_0q_3)$ vektorral, ez azt jelenti, hogy (q_1, q_2, q_3) és $(24q_2q_3, q_1^2+12q_3^2, 2q_1q_2)$ arányosak. Az első és az utolsó komponenseket összehasonlítva innen $q_1 \cdot 2q_1q_2 = q_3 \cdot 24q_2q_3$, ahonnan pedig $q_2(q_1^2 - 12q_3^2) = 0$ adódik. Ha $q_1^2 - 12q_3^2 = 0$, akkor $q_1 = q_3 = 0$, hiszen q_1 és q_3 racionálisan, $\sqrt{12}$ pedig irracionális. Amennyiben $q_2 = 0$, akkor az arányosság miatt (a középső komponenst figyelve) $q_1^2 + 12q_3^2 = 0$, és megint csak $q_1 = q_3 = 0$ adódik.

Megkaptuk tehát, hogy α $q_0 + q_2\sqrt{12}$ alakú. Mivel $q_0, q_2 \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{12})$. Tehát a $\mathbb{Q}(\sqrt{12})$ az egyetlen közbülső test.

Feladat 4. Döntse el, hogy a $\mathbb{Q}[x, y]/(x + y)$ gyűrű integritástartomány-e.

Megoldás: Tekintsük a
$$\eta : \mathbb{Q}[x, y] \to \mathbb{Q}[x], \quad p \to p(x, -x)$$

leképezést, ez nyilván homomorfizmus. Belátjuk, hogy magja $(x+y)$. Az $x+y$ polinom, és így az általa generált ideál, biztosan benne van a magban, tegyük fel, hogy van egy olyan r polinom, ami eleme a magnak, de nem eleme az ideálnak (vagyis nem osztható $(x+y)$-nal.) Válasszuk ezt az r-et úgy, hogy $\mathbb{Q}[x]$ feletti fokszáma (vagyis a tagjaiban fellépő y-kitevők maximuma) a lehető legkisebb legyen. Ez a fokszám nem 0, máskülönben $r \in \mathbb{Q}[x]$, de ekkor $\eta(r) = r \neq 0$, ellentmondva annak, hogy r a magban van.

Legyen $r = sy^n + r_1$, ahol $s \in \mathbb{Q}[x]$, r_1 pedig egy $\mathbb{Q}[x]$ feletti legfeljebb $n-1$ fokú polinom. Definiáljuk az $r^* := -xsy^{n-1} + r_1$ polinomot. Ekkor

$$\eta(r^*) = r^*(x,-x) = (r - (x+y)sy^{n-1})(x,-x) = \\ r(x,-x) - (x+(-x))s(x,-x)(-x)^{n-1} = 0,$$

tehát $r^* \in \operatorname{Ker}\eta$. Mivel az r^* egy $\mathbb{Q}[x]$ feletti legfeljebb $n-1$ fokú polinom, r minimális választása miatt $r^* \in (x+y)$. Viszont ekkor $r = r^* + (x+y)sy^{n-1} \in (x+y)$, ami ellentmondás.

A homomorfiatétel szerint tehát $\mathbb{Q}[x,y]/(x+y)$ izomorf $\mathbb{Q}[x]$-szel, ami integritástartomány.

Feladat 5. Tegyük fel, hogy $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ résztestek az $\mathbf{L}$ testben úgy, hogy $\mathbf{L} \,|\, (\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2)$ véges fokú bővítés, valamint $K_1 + K_2$ (komplexusösszeg) is résztest. Igazolja, hogy $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ közül az egyik tartalmazza a másikat.

Megoldás: Legyen $m := [\mathbf{K}_1 : (\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2)]$ és $n := [\mathbf{K}_1 : (\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2)]$. Ekkor az alterek dimenziótétele alapján

$$[(\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2) : (\mathbf{K}_1\cap\mathbf{K}_2)] = \dim(\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2) = \dim\mathbf{K}_1+\dim\mathbf{K}_2-\dim(\mathbf{K}_1\cap\mathbf{K}_2) = m+n-1.$$

(Itt a dimenziók a $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ test felett értendők.) Mivel $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ közbülső testei a $\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \,|\, \mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ bővítésnek, a fokszámtétel alapján $m+n-1$ osztjató m-mel és n-nel is. Ez csak úgy lehet, ha $m = 1$ vagy $n = 1$. Tehát vagy $\mathbf{K}_1$, vagy $\mathbf{K}_2$ elsőfokú bővítése $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$-nek, vagyis megegyezik vele. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{K}_1$ vagy $\mathbf{K}_2$ tartalmazza a másikat.